



Artículo de investigación

Modelado de los músculos extraoculares por el método de Lagrange

Modeling of the extraocular muscles using the Lagrange method

David Espinosa Gómez¹ , Eligio Cruz Albaro² , Gonzalo Viramontes Gamboa¹ , Cristopher Duarte Carranza¹ 

¹Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Avenida Francisco J. Mújica S/N, C. P. 58060, Morelia, Michoacán, México.

²Universidad Autónoma de Zacatecas, Avenida Solidaridad, Hidráulica, Zacatecas, C. P. 98068, México.

Autor de correspondencia: Espinosa Gómez David, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Avenida Francisco J. Mújica S/N, C. P. 58060, Morelia, Michoacán, México. Correo electrónico: david.espinosa@umich.mx. ORCID: [0000-0003-2200-9156](https://orcid.org/0000-0003-2200-9156).

Recibido: 15 de abril del 2026

Aceptado: 7 de agosto del 2026

Publicado: 8 de octubre del 2026

Resumen. – En este trabajo se ha desarrollado un método matemático para describir la dinámica del movimiento sacádico del globo ocular; este es un proceso biomecánico rápido que resulta de la interacción entre propiedades pasivas del ojo y la activación de los músculos extraoculares. Aquí, la metodología utilizada se basa en el formalismo de Lagrange, donde se ha considerado el globo ocular como un cuerpo rígido esférico con una única coordenada generalizada asociada a su rotación angular horizontal. El sistema se acopla a una representación viscoelástica lineal pasiva simplificada para capturar los efectos elásticos y disipativos de los músculos rectos. El sistema resultante se expresa como una ecuación diferencial lineal de segundo orden, cuya solución analítica se obtiene mediante el programa Python. Los resultados obtenidos muestran perfiles dinámicos de posición, velocidad y aceleración angular consistentes con el comportamiento cualitativamente reportados en la literatura. Por otra parte, la relación entre la velocidad máxima y la amplitud muestra una buena concordancia para sacadas de 15° a 20°, sin embargo, las diferencias observadas para amplitudes de 5° a 10° sugieren que la formulación actual puede mejorarse mediante el ajuste de parámetros no lineales.

Palabras clave: Mecánica Lagrangiana; Movimientos sacádicos; Planta oculomotora.

Abstract. – In this work, we developed a mathematical model to describe the dynamics of saccadic eye movements, a rapid biomechanical process resulting from the interaction between the passive mechanical properties of the eyeball and the activation of the extraocular muscles. The proposed methodology is based on the Lagrangian formalism, in which the eyeball is modeled as a rigid spherical body with a single generalized coordinate describing its horizontal angular rotation. The system is modeled using a simplified passive linear viscoelastic model to capture the elastic and dissipative effects of the rectus muscles. The resulting system is expressed as a second-order linear differential equation, whose analytical solution is obtained using a Python program. The predicted angular position, velocity, and acceleration profiles are in good qualitative agreement with the characteristic behavior of saccadic eye movements reported in the literature. Furthermore, the relationship between peak angular velocity and saccade amplitude shows good agreement with experimental observations for amplitudes between 15° and 20°. However, the discrepancies observed for smaller amplitudes, ranging from 5° and 10°, suggest that the current formulation could be improved by incorporating nonlinear effects and performing a more comprehensive calibration of the model parameters.

Keywords: Lagrangian mechanics, Saccadic eye movements; Oculomotor plant.



1. Introducción

El movimiento del globo ocular es un fenómeno biomecánico altamente coordinado que resulta de la interacción entre el globo ocular, la cavidad orbitaria y los músculos extraoculares, particularmente los músculos rectos pares, responsables de los movimientos horizontales y verticales de la mirada [1, 2].

La comprensión cuantitativa de este sistema es fundamental para el estudio de la fisiología oculomotora y para el desarrollo de modelos dinámicos que permitan describir su comportamiento mecánico. Sin embargo, muchos enfoques existentes se limitan a descripciones cinemáticas o formulaciones dinámicas que no integran de manera sistemática los efectos de inercia, elasticidad y disipación propios del sistema oculomotor [3].

En este contexto, el formalismo de la mecánica lagrangiana ofrece una ventaja teórica al permitir la derivación de las ecuaciones de movimiento a partir de las funciones de energía generalizadas, evitando el tratamiento explícito de las fuerzas de restricción y facilitando la incorporación de términos disipativos [4]. Por otro lado, el comportamiento mecánico de los músculos extraoculares puede aproximarse mediante modelos musculares tipo Hill, que representan al músculo como un sistema viscoelástico activo [5, 6].

En aplicaciones macroscópicas del sistema oculomotor es común emplear aproximaciones lineales de estos modelos, centradas en la elasticidad pasiva y la amortiguación, con el fin de obtener formulaciones matemáticas tratables que conserven el significado biomecánico esencial [7].

Con la información proporcionada anteriormente, se propone un modelo dinámico simplificado del movimiento del globo ocular inspirado en el comportamiento pasivo de un modelo muscular tipo Hill junto con el formalismo Lagrangiano extendido mediante la función de disipación de Rayleigh. De este modo, el objetivo principal es derivar una ecuación diferencial de segundo orden que describa el movimiento sacádico horizontal empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange, acoplando el globo ocular a una representación viscoelástica lineal pasiva simplificada que agrupa los efectos de los músculos rectos medial y lateral

2. Antecedentes

El estudio de la dinámica oculomotora ha evolucionado desde descripciones anatómicas hacia modelos matemáticos capaces de reproducir la velocidad y precisión de los movimientos sacádicos [8-10]. Investigaciones tempranas como las de Westheimer [11] caracterizaron experimentalmente las propiedades temporales de los movimientos oculares.

Posteriormente, Robinson [12] introdujo el concepto de la planta oculomotora proponiendo que el sistema formado por el globo ocular, los músculos extraoculares y los tejidos orbitales pueden describirse mediante un sistema dinámico de segundo orden que integra los efectos de inercia, elasticidad y disipación viscosa.



Por otro lado, Clark y Stark [13] profundizaron en el control recíproco entre los músculos agonistas y antagonistas; a su vez, se ha sabido que los trabajos de dichos autores constituyen las primeras contribuciones formales sobre la formulación del modelado matemático del sistema oculomotor. No obstante, Bahill, Clark y Stark [14] establecieron la relación conocida como “main sequence” que describe la dependencia entre la amplitud sacádica, la velocidad pico y la duración; esta relación se convirtió en un criterio fundamental para validar modelos del movimiento ocular.

Trabajos posteriores de Bahill [7], consolidaron el uso de modelos biomecánicos homeomórficos para refinamiento de parámetros viscoelásticos. En décadas recientes, los modelos tridimensionales han incorporado la presencia de poleas musculares que guían la trayectoria de los músculos extraoculares y contribuyen a explicar la implementación biomecánica de la ley de Listing [15-17]. Asimismo, el desarrollo de herramientas computacionales ha permitido explorar simplificaciones de baja dimensión para aplicaciones en tiempo real y en interfaces humano-computadora [18, 19], así como enfoques basados en elementos finitos para analizar las deformaciones de los tejidos orbitarios.

Aunque la mayoría de los enfoques clásicos se apoyan en formulaciones mecánicas tradicionales, en este trabajo se propone el uso del formalismo de Lagrange para derivar el modelo dinámico del sistema oculomotor. La aplicación de este formalismo es poco explorada dentro de la biomecánica ocular, no obstante, A. D. Polpitiya y sus colaboradores [20] destaca metodologías energéticas de Lagrange y Hamilton para describir sistemas biomecánicos, mientras que T. T. Ivancevic y sus colaboradores [21] aborda la dinámica y control de los movimientos oculares desde una perspectiva geométrica utilizando el modelo de Lagrange. Por lo tanto, la escasez de la literatura en este campo representa una oportunidad de investigación, dado que este enfoque permite obtener una descripción unificada de la dinámica ocular a través de principios físicos fundamentales. A su vez, podría aportar nuevas perspectivas para el análisis del control y la dinámica sacádica.

3. Biomecánica y cinemática de la planta oculomotora

El globo ocular como sistema mecánico. Desde una perspectiva del modelado dinámico, el globo ocular humano no se analiza por su composición biológica interna, sino que se conceptualiza como un cuerpo rígido esférico de masa constante confinado a rotar dentro de la cavidad orbitaria [11]. Dado que la traslación del centro de masa del ojo es insignificante durante la visión normal, el sistema reduce su complejidad dinámica, y su comportamiento inercial queda dictado casi exclusivamente por su momento de inercia alrededor del eje de rotación [12].

El sistema viscoelástico extraocular. El posicionamiento del globo ocular es accionado por seis músculos extraoculares. Sin embargo, para el estudio específico de los movimientos horizontales, el análisis cinemático se restringe a un único grado de libertad controlado por un par muscular antagónico fundamental: el músculo recto medial (responsable de la aducción) y el músculo recto lateral (responsable de la abducción) [13] (ver Figura 1). Mecánicamente, estos músculos y los tejidos conectivos adyacentes (como la cápsula de Tenon) no solo actúan como generadores de fuerza activa tras la estimulación neuronal, sino que imponen severas restricciones físicas al sistema [11]. Actúan como una red viscoelástica pasiva (modelada



análogamente mediante resortes y amortiguadores) que disipa energía cinética y proporciona fuerzas de restitución para devolver o mantener el ojo en una posición de equilibrio [14].

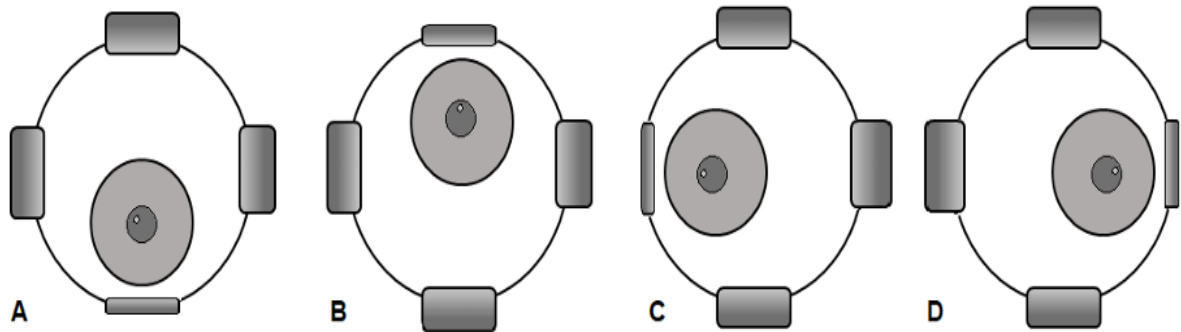


Figura 1. Representación biomecánica del movimiento ocular vertical y horizontal (descenso, ascenso, aducción y abducción) impulsado por el par antagonista de los músculos rectos medial y lateral.

Cinemática de los movimientos sacádicos. El sistema oculomotor puede ejecutar diversos tipos de seguimiento visual, tales como el seguimiento suave, vergencias y reflejos vestibulo-oculares para estabilizar la imagen [15]. Además de estos movimientos, el sistema oculomotor genera movimientos sacádicos que son movimientos oculares rápidos y balísticos que cambian bruscamente el punto de fijación [2, 22]. No obstante, el presente trabajo se centra exclusivamente en los movimientos sacádicos, los cuales representan el escenario mecánicamente más exigente para la planta oculomotora [16]. Las sacadas alcanzan velocidades pico extraordinarias, superando los 700°/s en movimientos de gran amplitud (superiores a 15°) [14, 17]. La naturaleza balística de la sacada implica que, una vez que la activación neuronal vence la inercia inicial y la viscosidad del sistema, la trayectoria se vuelve altamente predecible y fuertemente gobernada por la capacidad de los tejidos pasivos para amortiguar el movimiento antes de llegar al nuevo punto de fijación [18]. Esta dependencia de las propiedades viscoelásticas hace de la dinámica sacádica el fenómeno transitorio ideal para validar el modelo basado en la mecánica de Euler-Lagrange.

4. Metodología

La metodología empleada en este trabajo se basa en el formalismo Lagrangiano, donde se ha integrado una representación biomecánica simplificada del sistema oculomotor. El objetivo es desarrollar un modelo dinámico tratable que describa el movimiento rotacional del globo ocular bajo la acción de pares musculares agonista-antagonista, incorporando efectos de inercia, elasticidad pasiva y amortiguamiento viscoso. En este contexto, el globo ocular se ha modelado como un cuerpo rígido aproximadamente esférico con masa y radio constantes, cuyo movimiento se restringe a rotaciones alrededor de un eje que pasa por su centro geométrico. Bajo esta aproximación, el sistema presenta un único grado de libertad angular, representado por la coordenada generalizada $\theta(t)$ como se muestra en la Figura 2 (para más detalles, consultar [23]), asociada a movimientos en un plano principal (horizontal y vertical). Es importante mencionar que esta simplificación es válida para pequeños desplazamientos angulares, dado que, desde un punto de vista biomecánico, este límite resulta adecuado, ya que la mayoría de los movimientos sacádicos naturales presentan amplitudes menores a 20°. En este intervalo es posible emplear el esquema de ángulos pequeños, permitiendo representar el



sistema mediante un modelo lineal, sin embargo, para rotaciones mayores a 20° esta aproximación deja de ser válida matemáticamente y se requieren modelos no lineales [1, 7].

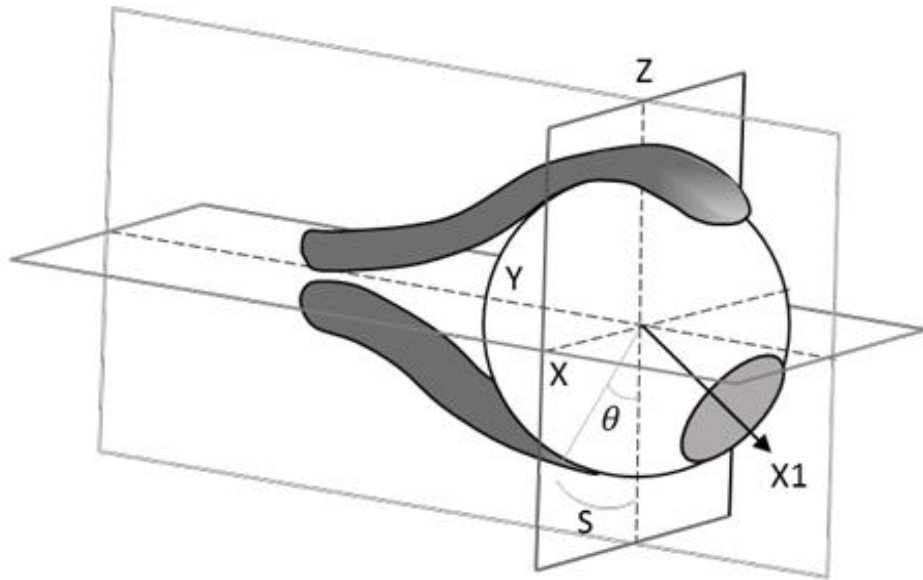


Figura 2. Coordenada generalizada.

Por otra parte, los músculos rectos pares se representan como actuadores viscoelásticos activos que generan torques sobre el globo ocular. Ahora, con el fin de tener un modelo dinámico analítico tratable, se ha considerado un modelo simplificado basada en elementos viscoelásticos lineales, donde se consideran únicamente los efectos de elasticidad pasiva y disipación viscosa, mientras que los fenómenos neuromusculares complejos se introducen de manera simplificada mediante fuerzas musculares externas dependientes del tiempo [7]. En este esquema, el músculo agonista genera activamente un torque mientras que el músculo antagonista contribuye de forma pasiva a la dinámica del sistema, permitiendo representar la interacción muscular mediante un par de torques opuestos, cuya activación responde a la dinámica de descarga neuronal [24].

En este trabajo se ha considerado que la energía cinética del sistema se define exclusivamente a partir del movimiento rotacional del globo ocular, despreciando la traslación de su centro de masa. Mientras que la energía potencial del sistema se asocia con la deformación elástica pasiva de los músculos, modelada como un resorte lineal equivalente. Adicionalmente, los efectos disipativos del entorno orbitario y del tejido muscular se incorporan mediante una función de disipación de Rayleigh proporcional a la velocidad angular, lo que permite modelar el amortiguamiento viscoso del sistema [4].

A partir de estas consideraciones se construye la Lagrangiana del sistema como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial y se aplica la ecuación de Euler- Lagrange extendida para sistemas no conservativos. El resultado es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que describe la dinámica rotacional del globo ocular bajo la acción de torques musculares externos; esta ecuación se resuelve analíticamente mediante la transformada de



Laplace para analizar la respuesta temporal del sistema ante una activación muscular idealizada, utilizando herramientas de la teoría de control clásica [25].

4.1 Descripción y la ecuación de movimiento del sistema físico

Con el fin de formular un modelo matemático tratable que describa la dinámica del movimiento ocular se establecen las siguientes consideraciones de modelado: a) El globo ocular se modela como un cuerpo rígido y se asume la forma esférica con dimensiones constantes durante el movimiento, b) El movimiento del globo ocular es puramente rotacional, considerando solo el ángulo de precesión, c) Se analiza el movimiento ocular solo en plano principal que sería horizontal y vertical, d) Se consideran pares musculares agonista y antagonista, que fungen mediante la generación de un torque sobre el globo ocular, e) Los efectos viscoelásticos del sistema oculomotor se modelan de forma lineal, f) Las propiedades mecánicas del sistema son invariantes con respecto al tiempo, como el tensor de inercia, la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento; permanecen constantes durante la simulación y g) Se ignoran efectos neuromusculares complejos, en su lugar, la activación muscular se introduce como una entrada externa al sistema dinámico. A continuación, se describe el desarrollo del modelo planteado.

De acuerdo con la información anterior, el modelado del sistema oculomotor se considera solo una coordenada generalizada $\theta(t)$, correspondiente al ángulo de rotación del globo ocular alrededor de un eje fijo que pasa por su centro geométrico. Esta aproximación asume movimientos angulares pequeños y permite analizar de manera independiente los planos horizontal y vertical. En este sentido, el Lagrangiano total del sistema es de la forma:

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - U. \quad (1)$$

Dado que el centro de masa del globo ocular permanece fijo, entonces $v = 0$, por consiguiente, la energía cinética queda únicamente asociada al movimiento rotacional:

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (2)$$

donde el momento de inercia del globo ocular es $I = \frac{2}{5}mr^2$ y la velocidad angular es $\omega = \dot{\theta}$. Por lo tanto, la energía cinética se reescribe como:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2. \quad (3)$$

La energía potencial elástica pasiva del sistema se asocia con la deformación de los músculos extraoculares, de esta manera, se ha modelado como un elemento elástico lineal y considerando ángulos pequeños de rotación, se tiene que

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \approx \frac{1}{2}k(r\theta)^2. \quad (4)$$



Por lo tanto, el lagrangiana del sistema es

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(r\theta)^2. \quad (5)$$

Ahora, para incorporar los efectos disipativos del tejido muscular y orbital, se introduce una función de disipación de Rayleigh definida como [4]:

$$R = \frac{B\dot{\theta}^2}{2}. \quad (6)$$

Una vez determinado el Lagrangiano del sistema, procederemos a encontrar la ecuación de movimiento, que se obtiene a partir de la ecuación de Euler-Lagrange para sistemas no conservativos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad (1)$$

con

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = I\ddot{\theta}, \frac{\partial L}{\partial q_i} = -kr^2\theta, \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = B\dot{\theta}. \quad (2)$$

Ahora, bajo la consideración que el globo ocular se comporta como una esfera rígida y que las fuerzas musculares actúan tangencialmente, entonces, el torque ejercido por cada músculo extraocular es [26]

$$\tau_{ag} = rF_{ag}, \quad (9)$$

$$\tau_{ant} = rF_{ant}, \quad (10)$$

donde r es radio del globo ocular. De este modo, el parámetro Q_i representa el torque neto generado por los músculos agonista y antagonista, el cual tiene la siguiente forma:

$$Q_i = \tau_{ag} - \tau_{ant} = r(F_{ag} - F_{ant}). \quad (11)$$

Aunque la activación de los músculos extraoculares está gobernada por complejos mecanismos neuronales de tipo pulse-step, en este trabajo proponemos que el torque neto se aproxima mediante funciones exponenciales basada en la descripción simplificada por Bahill [7]. Esta idealización conserva las características globales del movimiento sacádico, permitiendo analizar la dinámica del sistema mecánico ocular. Bajo esta consideración, la ecuación de movimiento toma la siguiente forma

$$I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + kr^2\theta = r(F_{ag} - F_{ant}), \quad (3)$$



siendo

$$F_{ant} = N_{ant} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad F_{ag} = N_{ag} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (4)$$

donde N_{ag}, N_{ant} son los impulsos que manda el cerebro. La representación de estos impulsos como funciones temporales permite capturar la dinámica de descarga de las neuronas motoras involucradas en el movimiento sacádico [25]. Entonces, la diferencia de las fuerzas queda de la siguiente forma:

$$F_{ag} - F_{ant} = (N_{ag} - N_{ant})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (5)$$

Al considerar la amplitud $A = N_{ag} - N_{ant}$ y definiendo la frecuencia natural y factor de amortiguamiento como $\zeta = \frac{B}{2\sqrt{IKr^2}}, w_n = \sqrt{\frac{kr^2}{I}}$. La ecuación (12) se puede reescribir como una ecuación diferencial lineal de segundo orden forzada [25]:

$$\ddot{\theta}(t) + 2\zeta w_n \dot{\theta}(t) + w_n^2 \theta(t) = \frac{A w_n^2}{kr} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (6)$$

Finalmente, la solución analítica de la ecuación (15) se obtuvo con el método de la transformada de Laplace [27], la cual se asume con condiciones iniciales nulas, correspondiente a un ojo inicialmente en reposo, es decir, $\theta(0) = 0$ y $\dot{\theta}(0) = 0$. Bajo estos valores iniciales, la solución está dado como:

$$\begin{aligned} \theta(t) = \frac{A}{kr} \frac{e^{-t(\frac{1}{\tau} + w_d + \zeta w_n)}}{2w_d(1 + \tau w_n[-2\zeta + \tau w_n])} & \left(-2e^{t(w_d + \zeta w_n)} \tau^2 w_d w_n^2 + \right. \\ & 2e^{t(\frac{1}{\tau} + w_d + \zeta w_n)} w_d [1 + \tau w_n(-2\zeta + \tau w_n)] + e^{\frac{t}{\tau}} (-w_d + w_n[\zeta + 2\zeta \tau w_d + \\ & \tau w_n - 2\zeta^2 \tau w_n]) + e^{t(\frac{1}{\tau} + w_d)} (-w_d + w_d[-\tau w_n + \zeta(-1 + 2\tau(w_d + \\ & \zeta w_d))]) \Big), \end{aligned} \quad (7)$$

siendo $w_d = w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$. Observemos que el primer bloque describe la dinámica mecánica del globo ocular, mientras que el segundo bloque representa el retraso neuromuscular, el cual permite representar de manera idealizada la dinámica de activación neural sin alterar la linealidad del sistema mecánico debido al término $(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

5. Discusión de resultados

Partiendo de la ecuación (16), se identifica que la amplitud depende del ángulo, por lo que $A = A(\theta_{obj})$. Además, el valor final de la sacada se determina cuando $t \rightarrow \infty$, con este se determina la amplitud A , esto es



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \frac{A}{kr} = \theta_{obj}. \quad (8)$$

Otros parámetros a considerar para la simulación numérica están dados en la Tabla 1. Los valores reportados son extraídos de la referencia [11, 23], salvo al valor de k , que es estimado en este trabajo mediante la relación w_n descrito anteriormente.

Tabla 1. Parámetros utilizados para la simulación numérica.

Parámetro	Valor	Referencia
ω_n	120 s^{-1}	[11]
ζ	0.7	[11]
τ	15 ms	[23]
m	$7.5 \times 10^{-4} \text{ kg}$	[23]
r	0.012 m	[23]
k	43.2 N/m	Propia

Considerando la información anterior, podemos reescribir la ecuación (16) como

$$\theta(t) = \theta_{obj}(-0.5992 e^{-84 t} \sin(85.6971 t) + 0.883721 e^{-84 t} \cos(85.6971 t) - 1.88372 e^{-66.66 t} + 1). \quad (9)$$

Para determinar la velocidad angular sacádica derivamos la ecuación (18):

$$\dot{\theta}(t) = \theta_{obj}[125.581 e^{-66.66 t} + e^{-84 t}(-125.581 \cos(85.6971 t) - 25.4004 \sin(85.6971 t))]. \quad (10)$$

Por último, determinamos la aceleración angular como

$$\ddot{\theta}(t) = \theta_{obj}[-8372.09 e^{-66.66 t} + e^{-84 t}(8372.09 \cos(85.6971 t) + 12895.6 \sin(85.6971 t))]. \quad (11)$$

Cabe mencionar que las expresiones matemáticas presentadas en este trabajo fueron verificadas mediante análisis dimensional, garantizando la consistencia de las unidades físicas en cada una de las expresiones obtenidas.

A continuación, se describe el comportamiento del sistema para diferentes amplitudes con ángulo objetivo menores a 20° , es decir, asumimos ángulos pequeños que son consistentes con lo reportado en la literatura [11, 28, 29]. La estimación numérica se ha realizado mediante algoritmo computacional usando *Python* [30, 31], donde se han insertado las capacidades de procesamiento NumPy [32] y los algoritmos de integración y funciones matemáticas de SciPy [33].

Las estimaciones de la posición angular evolucionan de forma suave y monótona hasta alcanzar el valor objetivo como se muestra en la Figura 4, sin oscilaciones apreciables ni sobre impulso



significativo. Además, se aprecia que el tiempo de asentamiento aumenta con la amplitud del movimiento, variando aproximadamente entre 50 ms para una sacada de 5° y cerca de 100 ms para una sacada de 20°.

Aunque el comportamiento concuerda cualitativamente con el comportamiento fisiológico, las duraciones predichas por el modelo son mayores en comparación con las reportadas experimentalmente, en particular para amplitudes pequeñas como las de 20-30 ms. Esta diferencia se atribuye al considerar parámetros constantes de rigidez y de amortiguamiento, los cuales reproducen una respuesta más lenta que la observada en el sistema oculomotor humano. En la Figura 5, se muestra el comportamiento de la velocidad angular en función del tiempo. Se observa que las curvas de velocidad angular presentan un único pico bien definido cuya magnitud aumenta proporcionalmente con la amplitud de la sacada.

La velocidad máxima para 5° se presenta en 19.70 ms con un valor estimado de 158.835 °/s, mientras que para 20° se presenta en 19.9 ms, siendo de 635.294 °/s. Al compararse con los perfiles presentados en la referencia [7,34], se observa una concordancia cualitativa en la evolución temporal de la velocidad. A su vez, la aceleración exhibe un perfil bifásico con una fase positiva inicial seguida de una fase negativa asociada al frenado mecánico del sistema viscoelástico como se observa en la Figura 6. Finalmente, los resultados indican que el modelo Lagrangiano propuesto captura las características principales de la dinámica del movimiento sacádico dentro del rango fisiológico considerado, mostrando concordancia cualitativa con los patrones experimentales reportados.

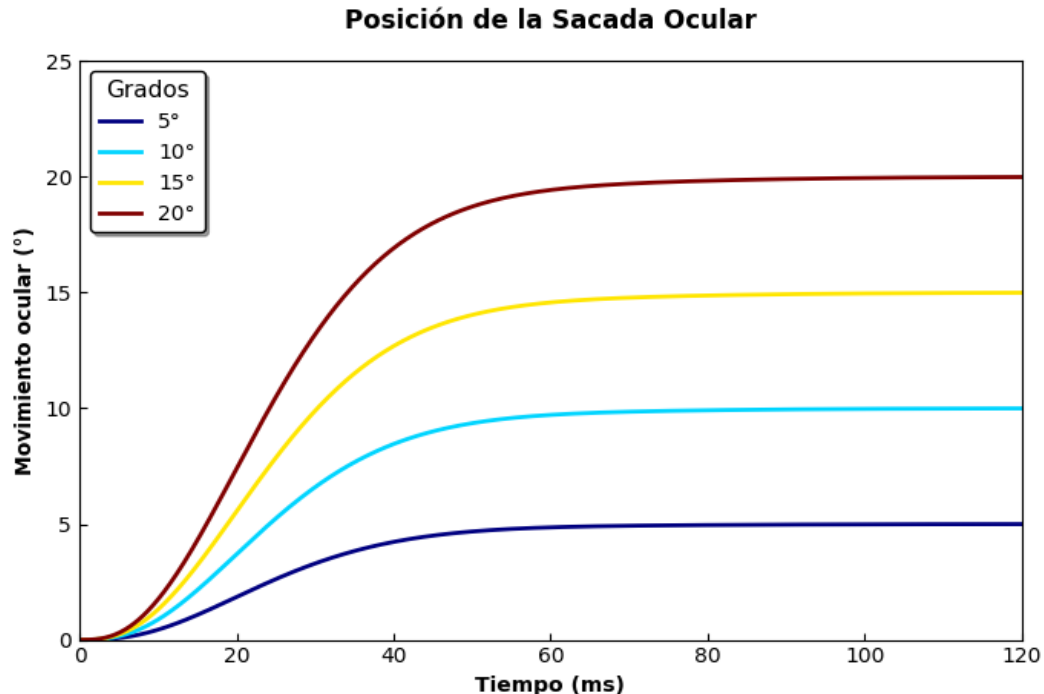


Figura 1. Movimiento del globo ocular.



Velocidad de la Sacada Ocular

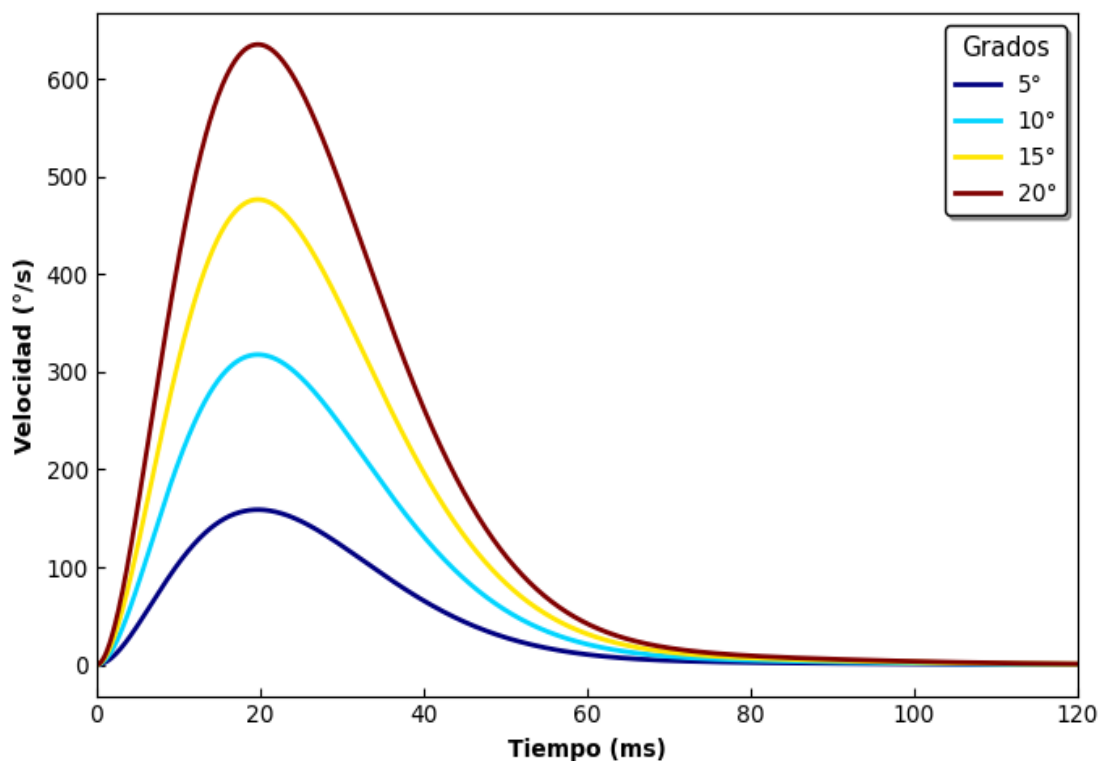


Figura 2. Velocidad de la sacada ocular.

Aceleración de la Sacada Ocular

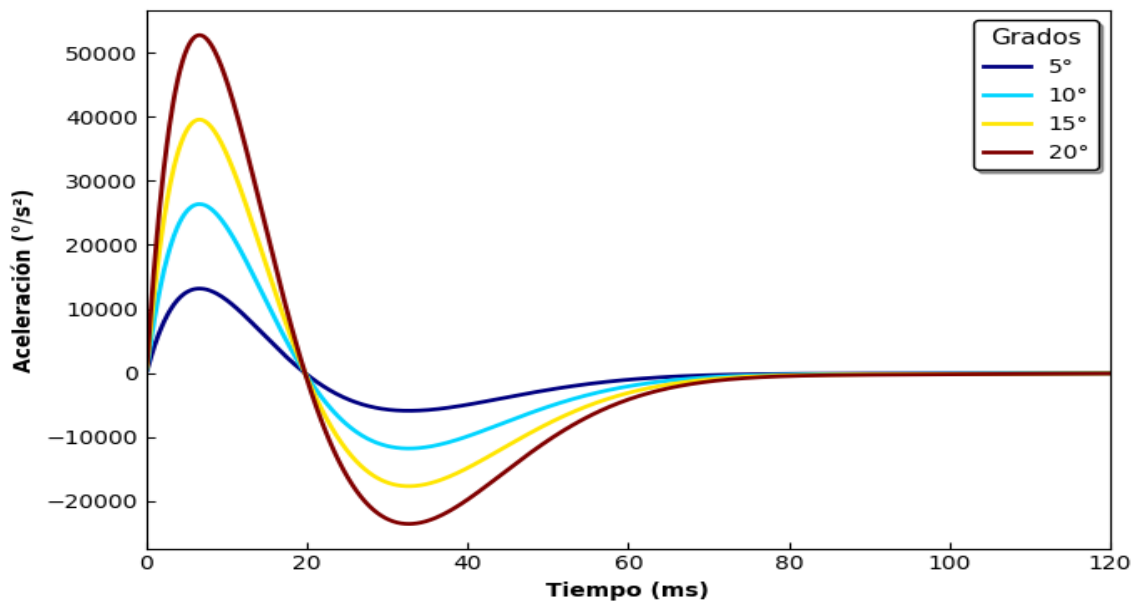


Figura 3. Aceleración de la sacada ocular.



En la Figura 7, se muestra la relación entre la velocidad máxima y la amplitud de la sacada estimada por el modelo para amplitudes entre 2° y 20° . Se aprecia un comportamiento lineal de la velocidad máxima conforme aumenta la amplitud, alcanzando un valor de $635.24^\circ/\text{s}$ para una amplitud de 20° ; este comportamiento reproduce cualitativamente la relación amplitud-velocidad pico descrita experimentalmente en la literatura clásica de movimientos sacádicos [7].

De acuerdo con los errores porcentuales mostrados en la Tabla II, el modelo presenta una mejor concordancia con los datos experimentales para amplitudes de la sacada de 15° y 20° , cuyos valores se encuentran dentro de la incertidumbre experimental. Aunque la comparación se limita a cuatro observaciones experimentales, los resultados delimitan el rango de aplicación del modelo dentro del intervalo analizado. De esta manera, una mejora predictiva podría alcanzarse incorporando efectos no lineales que permitan con mayor precisión la dinámica de las sacadas. Adicionalmente, la relación velocidad máxima-amplitud representa un comportamiento lineal en el intervalo estudiado (5° - 20°), que concuerda con la tendencia inicial de main sequence. Sin embargo, debido a aproximación lineal y el uso de parámetros constantes, el modelo no reproduce la saturación de la velocidad observada para amplitudes mayores.

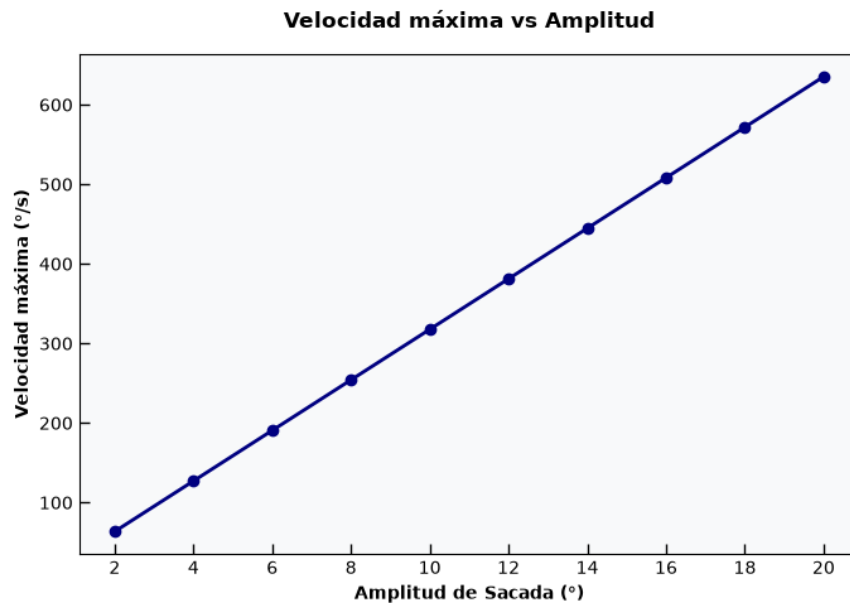


Figura 7. Comportamiento de la velocidad de pico vs amplitud.

Tabla 2. Estimaciones de las velocidades máxima comparada con los valores reportados de la referencia [35].

Sacada	Velocidad máxima ($^\circ/\text{s}$) [35]	Velocidad máxima estimada ($^\circ/\text{s}$)	Error porcentual
5	261 ± 42	158.81	39.2%
10	410 ± 67	317.62	22.5%
15	499 ± 43	476.43	4.5%
20	657 ± 78	635.24	3.3%



6. Conclusión

En este trabajo se desarrolló un modelo matemático para describir la dinámica angular del globo ocular durante movimientos sacádicos, empleando el formalismo de Lagrange bajo pequeñas rotaciones y una única coordenada generalizada. El sistema oculomotor se representó como un sistema mecánico, obteniéndose una ecuación diferencial de segundo orden con términos inerciales, elásticos y disipativos, la cual proporcionó una ecuación de movimiento analítica y permitió estudiar su respuesta temporal ante un torque externo idealizado. Los resultados muestran concordancia cualitativa con tendencias experimentales reportadas en la literatura. Aunque se observaron diferencias en las sacadas de baja amplitud y limitaciones para representar el comportamiento no lineal de la Main Sequence. Dichos resultados indican que el modelo constituye una aproximación preliminar que puede usarse como base para desarrollos posteriores donde se ajuste los parámetros del modelo y se realice formulaciones no lineales. De este modo, el objetivo principal del trabajo se cumple, ya que la contribución principal de la investigación radica en proporcionar una aproximación matemática y analíticamente para describir la dinámica básica del movimiento ocular.

7. Agradecimientos de autoría

David Espinosa Gómez: Conceptualización; Recursos; Ideas; Investigación; Metodología; Análisis formal; Análisis de datos; Escritura; Revisión y edición; Validación; Borrador original.
Eligio Cruz Albaro: Conceptualización; Análisis de datos; Revisión y edición; Validación.
Gonzalo Viramontes Gamboa: Conceptualización; Análisis formal; Revisión. Cristopher: Conceptualización; Investigación; Metodología; Análisis; Desarrollo de Software; Borrador original; Desarrollo del modelo.

Referencias

- [1] L. A. Remington, *Clinical Anatomy and Physiology of the Visual System*, 3rd Ed. Reino Unido: Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2012.
<https://books.google.com.mx/books?id=vyGnpwAACAAJ>
- [2] R. J. Leigh and D. S. Zee, *The Neurology of Eye Movements*, 5th Ed. Oxford, UK: Oxford Univ. Press, 2015. <https://books.google.com.mx/books?id=v2s0BwAAQBAJ>
- [3] J. M. Miller, "The mechanics of orbital connective tissue," *Dev. Ophthalmol.*, Vol. 40, pp. 11–26, 2007. <https://doi.org/10.1159/000100353>
- [4] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd Ed. United States: Pearson Education, 2002.
- [5] A. V. Hill, "The heat of shortening and the dynamic constants of muscle," *Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, Vol. 126, no. 843, pp. 136–195, 1938. <https://doi.org/10.1098/rspb.1938.0050>
- [6] F. E. Zajac, "Muscle and tendon: properties, models, scaling, and application to biomechanics and motor control," *Crit. Rev. Biomed. Eng.*, Vol. 17, no. 4, pp. 359–411, 1989. <https://hal.science/hal-04849267v1>
- [7] A. T. Bahill, "Development, validation, and sensitivity analyses of human eye movement models," *CRC Critical Reviews in Bioengineering*, Vol. 4, no. 4, pp. 271–355, 1980. <http://sysengr.engr.arizona.edu/publishedPapers/CRCpress.pdf>



- [8] C. A. Scudder, C. S. Kaneko, and A. F. Fuchs, "The brainstem system for generating saccadic eye movements," *Exp. Brain Res.*, Vol. 142, no. 4, pp. 439–462, Feb. 2002. <https://doi.org/10.1007/s00221-001-0912-9>.
- [9] D. L. Sparks, "The brainstem control of saccadic eye movements," *Nature Reviews Neuroscience*, Vol. 3, no. 12, pp. 952–964, 2002. <https://doi.org/10.1038/nrn986>
- [10] D. L. Sparks, Ellen J. Barton, "Neural control of saccadic eye movements," *Current Opinion in Neurobiology*, Vol. 3, pp. 966–972, 1993. [https://doi.org/10.1016/0959-4388\(93\)90169-Y](https://doi.org/10.1016/0959-4388(93)90169-Y)
- [11] G. Westheimer, "Mechanism of saccadic eye movements," *AMA Archives of Ophthalmology*, Vol. 52, no. 5, pp. 710–724, 1954. <https://doi.org/10.1001/archophth.1954.00920050716006>
- [12] D. A. Robinson, "The mechanics of human saccadic eye movement," *The Journal of Physiology*, Vol. 174, no. 2, pp. 245–264, 1964. <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1964.sp007485>
- [13] M. R. Clark and L. Stark, "Control of human eye movements: I. Modelling of extraocular muscle," *Mathematical Biosciences*, Vol. 20, no. 3–4, pp. 191–211, 1974. [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(74\)90001-7](https://doi.org/10.1016/0025-5564(74)90001-7)
- [14] A. Bahill, M. R. Clark, and L. Stark, "The main sequence, a tool for studying human eye movements," *Mathematical Biosciences*, Vol. 24, no. 3–4, pp. 191–204, 1975. [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(75\)90075-9](https://doi.org/10.1016/0025-5564(75)90075-9)
- [15] J. L. Demer, et al., "Evidence for fibromuscular pulleys of the recti extraocular muscles," *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, Vol. 41, no. 6, pp. 1280–1290, 2000. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/7730022/>
- [16] T. Haslwanter, "Mechanics of eye movements: Implications of the 'orbital revolution,'" *Annals of the New York Academy of Sciences*, Vol. 956, no. 1, pp. 33–41, 2002. <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.2002.tb02806.x>
- [17] C. Quaia and L. M. Optican, "Dynamic eye plant models and the control of eye movements," *Strabismus*, Vol. 11, no. 1, pp. 17–31, 2003. <https://doi.org/10.1076/stra.11.1.17.14088>
- [18] J. Prieto, et al., "OpenEyeSim: A biomechanical model for simulation of closed-loop visual perception," *Journal of Vision*, Vol. 16, no. 1, pp. 1–18, 2016. <https://doi.org/10.1167/16.15.25>
- [19] O. V. Komogortsev, C. Holland, S. Jayarathna, and A. Karpov, "2D linear oculomotor plant mathematical model: Verification and biometric applications," *ACM Transactions on Applied Perception*, Vol. 10, no. 4, pp. 1–18, 2013. <https://doi.org/10.1145/2536764.2536774>
- [20] A. D. Polpitiya, W. P. Dayawansa, C. F. Martin and B. K. Ghosh, "Geometry and Control of Human Eye Movements," in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 2, pp. 170–180, 2007, <https://doi.org/10.1109/TAC.2006.887902>
- [21] T. T. Ivancevic, B. Jovanovic, S. Djukic, M. Djukic, and S. Markovic, "Complex Sports Biodynamics With Practical Applications in Tennis". ABC, vol. 2, pp. 1–319, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-89971-6>
- [22] D. Purves, G. J. Augustine, D. Fitzpatrick, et al., *Neuroscience*, 2nd Ed. Sunderland (MA): Sinauer Associates, 2001. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK10991/>
- [23] M. Latarjet and A. R. Liard, *Anatomía humana*, 5th Ed. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Médica Panamericana, 2019. <https://books.google.co.ve/books?id=Gn64RKVTw0cC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false>



- [24] P. A. Sylvestre and K. E. Cullen, “Quantitative analysis of abducens neuron discharge dynamics during saccadic and slow eye movements,” *Journal of Neurophysiology*, Vol. 82, no. 5, pp. 2612-2632, 1999. <https://doi.org/10.1152/jn.1999.82.5.2612>
- [25] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th Ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2010.
- [26] R. A. Clark and J. L. Demer, “The Effect of Axial Length on Extraocular Muscle Leverage”, *American Journal of Ophthalmology*, <https://doi.org/10.1016/j.ajo.2020.03.033>
- [27] D. G. Z. and M. R. Cullen, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 7th Ed. Singapore, the United Kingdom, Australia, Mexico, Brazil, and Japan, Canada: Cengage Learning, 2009.
- [28] M. F. Land, S. M. Furneaux and I. D. Gilchrist, ‘The Organization of Visually Mediated Actions in a Subject without Eye Movements’, *Neurocase*, Vol. 8, pp. 80–87, 2002. <https://doi.org/10.1093/neucas/8.1.80>.
- [29] R. H. S. Carpenter, *Movements of the Eyes*, 2nd Ed. London: Pion, 1988.
- [30] Python Software Foundation, (2022). Python (V2, 3.11.1). <https://www.python.org/doc/>
- [31] J. VanderPlas, *Python Data Science Handbook: Essential tools for working with data*, 1rd Ed. 1005 Gravenstein Highway North, Sebastopol, CA 95472: O'Reilly Media, Inc., (2016). [Python Data Science Handbook: Essential Tools for Working with Data - Jake VanderPlas - Google Libros](https://www.google.com/books?id=3QmUgAEACAAJ)
- [32] C. R. Harris et al., "Array programming with NumPy," *Nature*, Vol. 585, no. 7825, pp. 357–362, 2020. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
- [33] P. Virtanen et al., "SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python," *Nature Methods*, Vol. 17, no. 3, pp. 261–272, 2020. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>
- [34] L. Gila, A. Villanueva, R. Cabeza, “Fisiopatología y técnicas de registro de los movimientos oculares,” *Anales Sis San Navarra*, Vol. 32, pp. 9-26, 2009. <https://doi.org/10.4321/S1137-66272009000600002>
- [35] A. T. Bahill, A. Brockenbrough, B. T. Troost, “Variability and development of a normative data base for saccadic eye movements”, *Invest Ophthalmol Vis Sci*, 1981, pp 116-25. https://www.researchgate.net/publication/15948395_Variability_and_development_of_a_normative_data_base_for_saccadic_eye_movements

Derechos de Autor (c) 2026 David Espinosa Gómez, Eligio Cruz Albaro, Gonzalo Viramontes Gamboa, Christopher Duarte Carranza



Este texto está protegido por una licencia [Creative Commons 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Usted es libre para compartir —copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato— y adaptar el documento —remezclar, transformar y crear a partir del material— para cualquier propósito, incluso para fines comerciales, siempre que cumpla la condición de:

Atribución: Usted debe dar crédito a la obra original de manera adecuada, proporcionar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que tiene el apoyo del licenciante o lo recibe por el uso que hace de la obra.

[Resumen de licencia](#) - [Texto completo de la licencia](#)