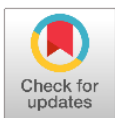










Artículo de investigación

## Cálculo exacto del volumen dentro de recipientes cilíndricos inclinados en función del nivel de llenado



### *Exact volume calculation inside tilted cylindrical container as a function of the fill level*

Michelle Guadalupe Salas-Flores<sup>1</sup> , David Gasca-Figueroa<sup>2</sup> , Francisco Javier García-Rodríguez<sup>3</sup> , José Alfredo Ramos-Beltrán<sup>2</sup> , Jorge Macías-Aboytes<sup>2</sup> , Jafet Gassen Tula-Maldonado<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Celaya, Av. Antonio García Cubas #600, Celaya, Gto., 38010, México. Departamento de Ingeniería Química

<sup>2</sup>Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Celaya, Av. Antonio García Cubas #600, Celaya, Gto., 38010, México. Departamento de Ciencias Básicas

<sup>3</sup>Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Celaya, Av. Antonio García Cubas #600, Celaya, Gto., 38010, México. Departamento de Ingeniería Mecatrónica

**Autor de correspondencia:** Jafet Gassen Tula-Maldonado, Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Celaya, Av. Antonio García Cubas #600, Celaya, Gto., 38010, México. Departamento de Ciencias Básicas. E-mail: [jafet.tula@itcelaya.edu.mx](mailto:jafet.tula@itcelaya.edu.mx). ORCID: 0000-0003-2615-879X.

**Recibido:** 22 de Marzo del 2024

**Aceptado:** 21 de Mayo del 2024

**Publicado:** 24 de Mayo del 2024

**Resumen.** - En el presente trabajo se obtienen expresiones matemáticas para determinar el volumen contenido dentro de un recipiente (contenedor) cilíndrico inclinado en función del nivel de llenado. La inclinación del recipiente está dada por el ángulo entre la horizontal y el eje de simetría del cilindro. Las formulaciones se obtienen para los tres casos posibles: i) el nivel de llenado está comprendido entre el punto más bajo del contenedor y el plano horizontal existente en la primera altura mojada, ii) el nivel de llenado comprendido entre los planos horizontales situados a la primera y segunda altura mojadas y iii) iniciando en el plano horizontal situado en la segunda altura mojada y terminando con el llenado completo del contenedor. Las expresiones obtenidas proporcionan el cálculo del volumen exacto en función de los parámetros conocidos radio, altura e inclinación del recipiente y del parámetro variable dado por la altura de llenado del recipiente. Finalmente, estas expresiones son aplicadas usando dimensiones regulares y críticas del recipiente en el transporte de sustancias, se observa un comportamiento similar al de una función sinusoidal en la gráfica de volumen vs altura de llenado. Los resultados obtenidos conducen a mejores prácticas en el diseño de contenedores cilíndricos para el transporte de sustancias y la implementación de protocolos de seguridad.

**Palabras clave:** Recipiente cilíndrico; Nivel de llenado; Volumen exacto; Recipiente inclinado; Primera altura mojada; Segunda altura mojada.

**Abstract.** - In the present work math expressions to determine the exact volume inside a tilted cylindrical recipe (container) as a function of the fill level were obtained. The tilt container is given by the angle between the horizontal and the axis symmetry of the cylinder. Formulations are developed for three cases: i) the limits of the filled level are between the lowest point in the container and the corresponding level were a horizontal plane reaches the first wet height, ii) the filled level is given by the liquid height limited by the horizontal planes corresponding to the first and second wet heights, respectively; iii) the filled level starts at the horizontal plane corresponding to the second wet height and ending with the fill full of container. The math expressions give the exact volume inside the container as a function of the known parameters of radius, length and tilt of the cylinder, and the variable parameter represented by the filled level. Finally, these expressions are applied using critical and regular dimensions of the recipe in the substance's transportation, the graph volume vs filled level show a behavior like a sinusoidal function. The results obtained lead to best practices in the design of cylindrical containers for the transport of substances and the implementation of security protocols.

**Keywords:** Cylindrical recipe; Fill level; Exact volume; Tilt container; First wet height; Second wet height.



## 1. Introducción

Los recipientes de almacenamiento de sustancias por lo general son horizontales y se dividen principalmente en cilíndricos, cuadrados y elípticos, la medición de la reserva del contenido del tanque es un problema desafiante cuando existen deformaciones diversas debido a los cimientos, temperatura, materiales de construcción [1].

En particular, los recipientes cilíndricos son ampliamente utilizados por la industria química, alimentaria y de hidrocarburos para almacenar y transportar sustancias en estado líquido [2]. En la clasificación de tanques se consideran tolerancias en la medición y espesor, y se tiene en cuenta las dimensiones de la base y longitud, expansión y contracción del material del recipiente para realizar la calibración del tanque [3], [4], se han desarrollado métodos para la calibración horizontal de tanques cilíndricos instalados en una posición fija con un máximo de inclinación de 10 cm por metro de longitud han sido desarrollados [5].

Además, determinar el volumen contenido dentro de estos recipientes cuando son llenados parcialmente en función de la altura de llenado [6] resulta sencillo cuando los recipientes se encuentran apoyados sobre una de sus superficies planas [7], [8], [9], [10], en cambio el cálculo de este volumen parcial es un tanto más complejo cuando están completamente apoyados sobre la superficie curva en un plano horizontal [11].

Cada país define sus normas de metrología y en países como la Cuba, un tanque es considerado horizontal cuando su inclinación presenta 1 cm de altura por cada metro de longitud (1%) [12] y en general, por norma 1% es la inclinación permitida para considerar que un tanque está colocado de manera horizontal [13]. En la práctica los casos más realistas, ocurren cuando

el recipiente esta recostado respecto a su superficie curva y presenta una inclinación respecto de la horizontal, los tanques cilíndricos al inclinarse generan superficies internas que indicaran el nivel del contenido del tanque que estarán en función del grado de inclinación del tanque contenedor [14], la inclinación está dada por el ángulo entre la horizontal y el eje de simetría del cilindro. Resulta complicado que cuando los vehículos de transporte llegan a las estaciones de carga y descarga encuentren superficies perfectamente niveladas.

Aproximaciones para estimar el volumen parcial dentro de un recipiente cilíndrico inclinado como una función de la altura de llenado han sido desarrolladas ampliamente [15], y en muchos casos toman un tanque cilíndrico horizontal con tapas esféricas para relacionar el registro de altura que representa determinado volumen con los registros en un tanque inclinado a través de lecturas en tiempo real de ambos parámetros [16], [17].

Otros desarrollos emplean aproximaciones [18], soluciones numéricas y de mínimos cuadrados [19], [20] a planteamientos matemáticos [21], [22], soluciones parciales o para casos específicos [23] o en su defecto, la solución presentada contiene términos que no son definidos claramente y contienen inconsistencias [24], e incluso la norma 12917 [25], [26] cuya última revisión fue efectuada en 2017, es empleada en la industria de los hidrocarburos para la estimación del volumen de llenado dentro de un tanque cisterna de forma cilíndrica en función del nivel de combustible, aunque llega a ser no tan exacta, también la norma API 2551:1987, establece que se debe hacer corrección de gráficos de volumen por inclinación, pero solo ofrece la posibilidad de aplicar la misma a partir de un gráfico que se puede utilizar cuando el registro de medición se encuentre en el centro longitudinal del tanque



[27]. Tanto en la norma API como en la norma ISO, se indica de forma estricta que la corrección por inclinación de un tanque cilíndrico debe realizarse por método gráfico propuesto por COATS en 1948 que se basa en estimaciones por medio de derivadas parciales [28].

En el presente trabajo se definen los conceptos de primera y segunda altura mojadas que separan las tres regiones de estudio presentadas y se desarrolla la metodología para obtener fórmulas matemáticas para determinar con exactitud el volumen contenido en el interior de un tanque cilíndrico horizontal con inclinación como una función de la altura de llenado, radio y longitud del recipiente e inclinación del recipiente, resaltando que la longitud y radio pueden ser consideradas como las lecturas finales de estas mediciones después de cuantificar los efectos de dilatación y contracción térmica.

El trabajo se aborda de la siguiente manera: En el marco teórico se rota el recipiente cilíndrico de manera que el planteamiento del problema se centra en la determinación del volumen comprendido entre un cilindro circular recto y un plano inclinado en el mismo ángulo que el recipiente original, este plano representa el nivel

## 2. Marco teórico

En el desarrollo de éste trabajo se ilustra el método para el cálculo del volumen parcial exacto contenido dentro de un recipiente cilíndrico con una inclinación dada por el ángulo entre la horizontal y el eje de simetría del cilindro, para las tres situaciones que pueden presentarse en el análisis; i) el nivel de llenado está comprendido entre el punto más bajo del contenedor y el plano horizontal existente en la primera altura mojada, ii) el nivel de llenado comprendido entre los planos horizontales situados a la primera y segunda altura mojadas y iii) iniciando en el plano horizontal situado en la

de llenado y se construye mediante un vector normal producido por un vector perpendicular al plano de trabajo y un vector director en el plano de trabajo paralelo a la altura de llenado.

De lo anterior el problema se divide en tres zonas, la inferior implica un volumen obtenido directamente mediante integrales de volumen, la región central emplea la misma formulación que la inferior, pero requiere de la sustracción de un volumen que no es parte de la región de estudio, en tanto que para la región superior es necesario sustraer al volumen total el volumen recursivo de esta región, para los tres casos se determinan formulaciones para el volumen máximo de llenado en cada región.

En la sección de análisis y discusión de resultados se resumen las expresiones para calcular el volumen como una función de la altura de llenado y el volumen máximo para las tres regiones de trabajo con sus respectivos intervalos de validez, además se define el ángulo crítico para el cual las fórmulas obtenidas son válidas y un análisis de sensibilidad respecto al comportamiento del volumen en función de la inclinación en relación con el ángulo crítico.

segunda altura mojada y terminando con el llenado completo del contenedor. Se obtienen expresiones matemáticas en función de la altura de llenado para los tres casos expuestos. Finalmente, estas ecuaciones son aplicadas a tres casos de interés: a) tanque cisterna con dimensiones máximas permitidas e inclinación de  $20^\circ$ , b) tanque cisterna con dimensiones en exceso permitidas e inclinación de  $20^\circ$  [29] e c) caso con inclinación media y dimensiones promedio de los tanques cisterna empleados en el transporte de sustancias e hidrocarburos.



### 3. Metodología

El volumen contenido dentro de un recipiente cilíndrico de longitud  $L$ , radio  $R$  e inclinación  $\theta$  respecto a la horizontal está delimitado por un plano horizontal  $z_h$  situado a la altura de llenado  $h$ . Para calcular este volumen parcial es conveniente fijar un marco de referencia rotado un ángulo  $\theta$ , con centro en una de las tapas planas y eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados como se ilustra en la figura 1. La inclinación es tal que  $\theta \leq \tan^{-1}(2R/L)$ . En la figura 1, las superficies planas  $P1$  y  $P3$  separan las regiones de interés, son paralelos entre sí y perpendiculares al plano  $xz$ , esto es tienen en común el mismo vector normal [30]. Es de hacer notar, que estos planos son representativos del nivel de llenado proyectado en la tapa plana

izquierda reflejado en las posiciones  $x_1 = -R + L \tan \theta$  y  $x_2 = +R$ , respectivamente. Permita definir  $x_1$ , como la posición de la primera altura mojada que representa el nivel de fluido  $h = L \tan \theta$  que es proyectado en la tapa plana inferior del recipiente, para el cual toda la línea inferior de la superficie curva está completamente cubierta por el nivel de llenado, y definiendo  $x_2$ , como la posición de la segunda altura mojada que representa el nivel del líquido  $h = 2R \cos \theta$  que es proyectado en la tapa plana inferior del recipiente, para el cual, la tapa está completamente cubierta como se ilustra en la figura 1. El plano  $P2$  es representativo de manera general del plano de la superficie de llenado del recipiente cilíndrico, cuando esté esta parcialmente lleno a un nivel o altura  $h$ .

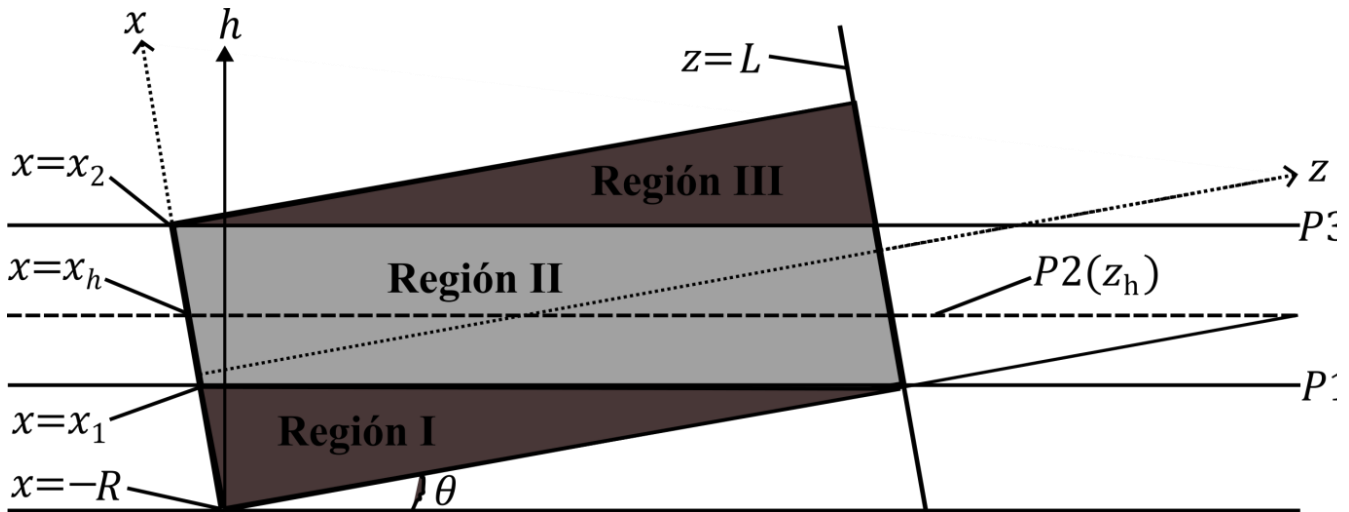


Figura 1. Representación del volumen de llenado de un recipiente cilíndrico de radio  $R$  y longitud  $L$  para una inclinación  $\theta$  a determinada altura  $h$ .

#### 3.1 Ecuación del plano que define la altura de llenado

El volumen contenido dentro del recipiente cilíndrico está delimitado por el plano  $P2$  y el cilindro  $c$  que tiene por ecuación  $x^2 + y^2 = R^2$ . En la figura 1, el punto inferior derecho del

recipiente de coordenadas  $(x, z)$  dadas por  $(-R, L)$  se emplea de referencia para generalizar la ecuación del plano en función de la altura  $h$ , este punto está contenido en el plano  $P1$  y también es un punto de una recta de intersección entre los planos  $P1$  y  $xz$ , la inclinación,  $m$ , de la



recta de intersección está dada por  $m = -\tan \theta$ , y su ecuación resulta en,

$$x + z \tan \theta + R - L \tan \theta = 0 \quad (1)$$

Definiendo la ecuación de la recta dada por la expresión (1), como una función de dos variables  $f(x, z) = x + z \tan \theta + R - L \tan \theta$ , se obtiene un vector normal  $\vec{n}$  contenido en el plano xz por medio del gradiente  $\vec{\nabla}f(x, z)$ , este vector es perpendicular tanto a la recta (1) como al plano P1.

$$\vec{n} = \vec{\nabla}f(x, z) = 1\hat{i} + \tan(\theta)\hat{k} \quad (2)$$

Extendiendo a tres dimensiones las componentes de la normal al plano P1,  $\vec{n}(x, y, z) = 1\hat{i} + 0\hat{j} + \tan(\theta)\hat{k}$ , la normal también es normal al plano P2 y un punto contenido en el plano P2 esta dado por  $(x, y, z) = (-R + h \sec \theta, 0, 0)$ , así la ecuación del plano que define la altura de llenado del recipiente se obtiene del producto punto entre el vector  $\vec{n}(x, y, z)$  y un vector en el plano P2 dado por  $(x + R - h \sec \theta, y - 0, z - 0)$ , resulta la ecuación (3).

$$V_1 = 2 \int_{-R}^{x_h} \int_0^{y_1} [h \csc \theta - (x + R) \cot \theta] dy dx \quad (4)$$

donde  $x_h = -R + h \sec \theta$  es la altura mojada proyectada sobre el plano que contiene a la tapa plana inferior del recipiente y  $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ , para esta región se tiene un volumen máximo cuando  $h = L \sin \theta$ .

Región II: Iniciando en el nivel donde se proyecta la primera altura mojada en la tapa izquierda del cilindro (plano P1), hasta el nivel donde se proyecta la segunda altura mojada en la misma tapa (plano P3). La altura de llenado en esta región varía en el intervalo  $L \sin \theta \leq h < 2R \cos \theta$ . Para el cálculo del volumen en esta

$$z_h = -(x + R) \cot \theta + h \csc \theta \quad (3)$$

donde,  $z_h$  es la ecuación del plano P2 en función del nivel de llenado.

### 3.2 Expresiones matemáticas para determinar el volumen en las regiones de análisis

En la figura 1, se observa que conforme el nivel de llenado crece, las condiciones geométricas cambian y se distinguen tres regiones de estudio que son analizadas a continuación.

Región I: Desde el punto más bajo del tanque, hasta el nivel de la primera altura mojada limitada por el plano P1. La altura varía en el intervalo  $0 \leq h < L \sin \theta$ . El volumen contenido dentro del tanque está comprendido entre los planos  $z_h$  y  $z = 0$  delimitados por el cilindro c en dirección de “y” y en dirección de “x” los límites varían de  $x = -R$  hasta  $x = x_h$ , el volumen esta dado por

región sigue siendo válida la expresión para la región 1 ( $V_1$ ), sin embargo, esta expresión comienza a acumular un volumen que no está contenido en el cilindro (ver zona exterior del lado derecho de figura 1), y es necesario sustraerlo. El volumen que es necesario sustraer está comprendido por el plano  $z_h$  y el plano  $z = L$ , delimitado por el cilindro c en dirección de “y” y en dirección de “x” los límites sufren una transformación lineal que varían desde  $x = -R$  hasta  $x = x_{hd}$  donde en esta dirección se sustrae el avance de x dado por  $L \tan \theta$  que ha crecido a causa del aumento de la altura h, resultado la expresión,



$$V_2 = 2 \int_{-R}^{x_{hd}} \int_0^{y_1} [h \csc \theta - (x + R) \cot \theta] dy dx - 2 \int_{-R}^{x_{hd}} \int_0^{y_1} [h \csc \theta - L - (x + R) \cot \theta] dy dx \quad (5)$$

donde  $x_{hd} = -R + h \sec \theta - L \tan \theta$  es la altura mojada proyectada en el plano que contiene a la tapa superior, en la región 2 el volumen máximo se obtiene cuando  $h = 2R \cos \theta$ .

Región III: Iniciando en el nivel donde se proyecta la segunda altura mojada (plano P2), hasta el llenado completo del recipiente cilíndrico. La altura de llenado varía en el intervalo dado por  $2R \cos \theta \leq h \leq 2R \cos \theta + L \sin \theta$ . El volumen en la última zona se determina con una expresión recursiva, donde la suma  $V_{2_{m\acute{a}x}} + V_{1_{m\acute{a}x}}$  representa el volumen total y se sustrae el cálculo del volumen de la tercera

región, el cual varía desde un valor igual a  $V_{1_{m\acute{a}x}}$  en magnitud hasta un valor de 0 conforme  $h$  crece. De esta manera, el volumen a sustraer es el volumen comprendido por el plano  $z = L$  y el plano  $z_h$ , delimitado por el cilindro  $c$  en dirección de “y” y en dirección de “x” el límite inferior como consecuencia del crecimiento de  $h$  también debe ser desplazado una cantidad  $L \tan \theta$  unidades, similar a como se realizó en el caso 2. Así, el límite inferior varía desde  $x = x_{hd}$ , hasta  $x = R$ , donde finalmente la expresión para esta zona está dada por,

$$V_3 = V_{2_{m\acute{a}x}} + V_{1_{m\acute{a}x}} - 2 \int_{x_{hd}}^R \int_0^{y_1} [L - h \csc \theta + (x + R) \cot \theta] dy dx \quad (6)$$

En la región 3 el volumen máximo se obtiene cuando  $h = 2R \cos \theta + L \sin \theta$

#### 4. Análisis y discusión de resultados

En la tabla 1 se resumen los resultados de los planteamientos de la sección de métodos. Los resultados obtenidos son aplicables a recipientes de forma cilíndrica recostados sobre su superficie curva con una inclinación que no exceda el ángulo crítico dado por  $\tan^{-1}(2R/L)$ . Estos

resultados también son útiles para estimar el volumen contenido en recipientes cilíndricos inclinados con tapas semiesféricas que contienen rompeolas en función de la altura de llenado acorde con la norma ISO-12917 [25].

Las ecuaciones (7), (9) y (11) son las expresiones para el cálculo exacto del volumen de llenado del recipiente cilíndrico en las regiones 1, 2 y 3 respectivamente, tanto que las expresiones (8), (10) y (12) son expresiones para determinar el volumen acumulado máximo en las regiones 1, 2 y 3 respectivamente.



**Tabla 1:** Ecuaciones para determinar el volumen contenido en el recipiente cilíndrico inclinado en función de la altura de llenado.

Región		Volumen
	$V_1 = \left(\frac{R_1}{R} R_2^{\frac{1}{2}} + \text{sen}^{-1} R_1 + \frac{\pi}{2}\right) k_1 + \frac{2}{3} R_2^{\frac{3}{2}} \cot \theta$	(7)

I	$0 \leq h < L \text{sen } \theta$	
	$V_{1\text{max}} = \left(\frac{R_3}{R} R_4^{\frac{1}{2}} + \text{sen}^{-1} R_3 + \frac{\pi}{2}\right) k_2 + \frac{2}{3} R_4^{\frac{3}{2}} \cot \theta$	(8)

		(9)
	$V_2 = \frac{\pi L R^2}{2} + \frac{2}{3} \cot \theta \left(R_2^{\frac{3}{2}} - R_6^{\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{R_1}{R} R_2^{\frac{1}{2}} + \text{sen}^{-1} R_1\right) k_1 - \left(\frac{R_5}{R} R_6^{\frac{1}{2}} + \text{sen}^{-1} R_5\right) k_3$	

II	$L \text{sen } \theta \leq h < 2R \cos \theta$	
	$V_{2\text{max}} = (L + R \cot \theta) \frac{\pi R^2}{2} - \frac{2}{3} \cot \theta R_4^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{R_3}{R} R_4^{\frac{1}{2}} + \text{sen}^{-1} R_3\right) k_2$	(10)

II		(11)
	$V_3 = \pi L R^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{R_5}{R} R_6^{\frac{1}{2}} - \text{sen}^{-1} R_5\right) k_3 - \frac{2}{3} \cot \theta R_6^{\frac{3}{2}}$	

I	$2R \cos \theta \leq h \leq 2R \cos \theta + L \text{sen } \theta$	
	$V_{3\text{max}} = \pi L R^2$	(12)

$R_1 = x_h/R, R_2 = R^2 - x_h^2, R_3 = x_1/R, R_4 = R^2 - x_1^2, R_5 = x_{hd}/R, R_6 = R^2 - x_{hd}^2, k_1 = (h \csc \theta - R \cot \theta) R^2 k_2 = (L - R \cot \theta) R^2, k_3 = (h \csc \theta - R \cot \theta - L) R^2$  y  $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ .

Las expresiones (7) - (12) son expresiones para determinar el volumen exacto y el volumen máximo en las tres regiones de interés, en función de la altura de llenado y los parámetros conocidos como R (radio del cilindro), L (longitud del cilindro) y la inclinación del recipiente cilíndrico ( $\theta$ ). Justo en el límite cuando la inclinación  $\theta = \tan^{-1}(2R/L)$  el volumen de la región 2 es igual a cero, cabe mencionar que en todo momento la capacidad de las regiones 1 y 3 son iguales, sin embargo, sus tasas de llenado tienen un comportamiento opuesto en sentido creciente de la altura h.

En la figura 2 se muestra la aplicación de las ecuaciones de la tabla 1 en la obtención del volumen V dentro del recipiente cilíndrico con inclinación como una función de la altura de llenado para tres casos de estudio: a) dimensiones máximas permitidas para transporte carretero (NOM-002-SCT/2011) con radio de 2.125 m y longitud de 12.9 y una inclinación excesiva de 18° (Va, Fig. 2(a)) b) dimensiones con excedente

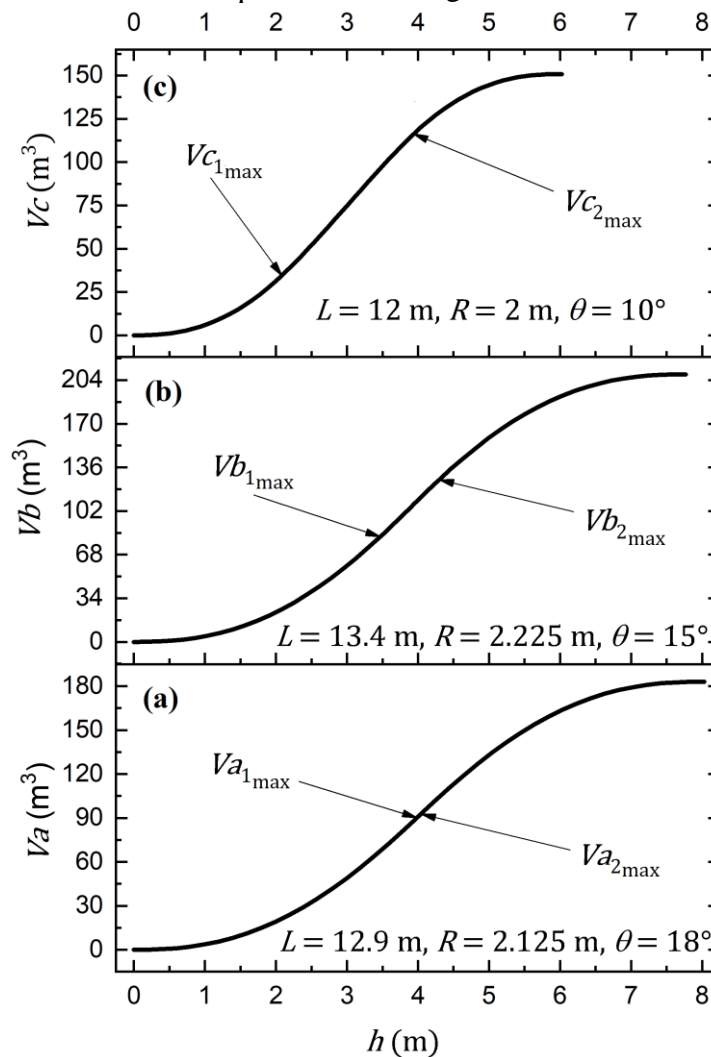
permitido con radio de 2.225 m y longitud de 13.4 m a una inclinación excesiva de 15° (Vb, Fig. 2(b)) y c) dimensiones por debajo del nivel máximo con radio de 2 m y longitud de 12 m e inclinación media de 10° (Vc, Fig. 2(c)). Las gráficas 2(a), 2(b) y 2(c) muestran el volumen contenido dentro del cilindro como una función del nivel de llenado. Es de hacer notar que el gráfico V vs h presenta un comportamiento cóncavo hacia arriba en la región 1 ( $0 \leq V < V_{1\text{max}}$ ), en la región 2 el comportamiento es aproximadamente lineal ( $V_{1\text{max}} \leq V < V_{2\text{max}}$ ) y en la región 3 es un comportamiento cóncavo hacia abajo ( $V_{2\text{max}} \leq V \leq V_{3\text{max}}$ ), como era de esperarse la gráfica presenta simetría respecto al punto medio donde se tiene la altura y el volumen de llenado medios.

De la figura 2(a) se observa que cuando el ángulo de inclinación del tanque es más próximo al valor del ángulo dado por  $\theta = \tan^{-1}(2R/L)$  la región II tiende a disminuir y sería inexistente en el caso de que la inclinación fuera exactamente al ángulo



crítico, conforme el ángulo de inclinación disminuye la región 2 comienza a ganar terreno y las regiones I y III comienzan a disminuir como se observa en las figuras 2(b) y 2(c), cuando  $\theta = 0$ , estas regiones serían inexistentes y se tendría solo el caso de un tanque cilíndrico recostado sobre la horizontal y la expresión (9) describiría el comportamiento del volumen contenido en el recipiente en función del nivel de líquido. También de la figura 2 se observa que el

comportamiento de la gráfica es similar al de una función sinusoidal, sin embargo, modelar mediante este tipo de función tendría grandes discrepancias puesto que para la región II el volumen en función de la altura de llenado presenta un comportamiento similar al de una función lineal cuando la inclinación tiende a cero. Además, también se observa que la región central disminuye conforme la inclinación tiende al ángulo crítico.



**Figura 2.** Gráfico del volumen contenido dentro del tanque cilíndrico en función de la altura de llenado para tres casos: a) dimensiones máximas permitidas para transporte carretero (NOM-002-SCT/2011 [2]) y una inclinación excesiva, b) dimensiones con excedente permitido a una inclinación excesiva y c) dimensiones por debajo del nivel máximo e inclinación media.





## 5. Conclusiones

El presente trabajo se plasman resultados importantes para la industria de hidrocarburos y química, al facilitar el cálculo exacto del volumen dentro de recipientes cilíndricos con inclinación en función de la altura de llenado y parámetros dimensionales conocidos. Los resultados obtenidos contribuyen a mejorar las prácticas para el diseño de contenedores cilíndricos y el transporte de sustancias, así como la mejora en la implementación de protocolos de seguridad y verificación de los procesos de compra y venta de sustancias, además de poder cuantificar la merma ocurrida durante el proceso de transporte. El análisis se distribuyó en tres regiones de interés, para las cuales se proporcionan expresiones desarrolladas para el cálculo exacto del volumen parcial y del volumen máximo con la limitante de que la inclinación no exceda un ángulo dado por  $\tan^{-1}(2R/L)$ . El<sup>Los</sup> volumen de llenado presenta un comportamiento parecido a la función sinusoidal en función de la altura de llenado. Sin embargo, el presente trabajo proporciona los valores exactos del volumen y la modelación presentaría desviaciones que son influenciados por la inclinación del tanque y por el comportamiento casi lineal en la región comprendida entre las dos alturas mojadas, así mismo, las formulaciones matemáticas no son afectadas por efectos de dilatación y contracción térmica del recipiente, siempre y cuando este conserve su forma cilíndrica, ya que en los cálculos se considera el valor final de radio y longitud.

## 6. Reconocimiento

El Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Celaya apoya este trabajo a través de la Convocatoria de Proyectos Investigación Científica, Desarrollo Tecnológico e Innovación 2024.

## 7. Reconocimiento de autoría

*Michelle Guadalupe Salas-Flores:* Investigación, escritura de borrador, verificación de expresiones matemáticas.

*David Gasca-Figueroa:* Dirección de la investigación, desarrollo de expresiones matemáticas, escritura y revisión del borrador.

*Francisco Javier García-Rodríguez:* Escritura, revisión y edición del borrador.

*Jorge Macías-Aboytes:* Conceptualización, revisión y supervisión.

*José Alfredo Ramos-Beltrán:* Conceptualización, simulación por computadora e investigación.

*Jafet Gassen Tula-Maldonado:* Administración y Codirección de la investigación, desarrollo de expresiones matemáticas, simulación por computadora, escritura de borrador.

## Conflicto de intereses

Autores declaran que no existe conflicto de interés en presentar el presente trabajo.

## Referencias

- [1] J. Sun, «The discussion of horizontal tank volume about the problematic point of the verification and calculation», *Pet. Prod. Appl. Res.*, vol. 18, n.º 5, pp. 20-24, 2000.
- [2] NORMA Oficial Mexicana, «Listado de las sustancias y materiales peligrosos más usualmente transportados». 2011.
- [3] American Petroleum Institute, «Standard Method for Measurement and Calibration of Horizontal Tanks». Washington D. C.: American Petroleum Institute, 1965.
- [4] J. Guan y H. Zhao, «Practical methods of oil volume calibration of horizontal storage tank», *Metrol. Meas. Tech.*, vol. 31, n.º 3, pp. 21-36, 2004.
- [5] American Petroleum Institute, «Chapter 2.2E: Petroleum and Liquid Petroleum Products - Calibration of Horizontal Cylindrical Tanks -



- Part 1: Manual Methods, First Edition, Includes Errata (2009)», en *Manual of Petroleum Measurement Standards*, Washington D. C.: American Petroleum Institute, 2014.
- [6] C. Li, W. Zhou, J. Lu, y T. Liang, «The function relation of remain liquid volume and oil height of storage tank», *Petro-Chem. Equip.*, vol. 6, pp. 25-27, 2001.
- [7] D. G. Zill, *Matemáticas 3: Cálculo de varias variables*, 2a ed. McGraw Hill/Interamericana, 2015.
- [8] *Cálculo de varias variables*. Ciudad de México: Cengage Learning, 2023.
- [9] L. Leithold, *El cálculo*, Séptima edición, Trigésima tercera reimpresión. México D.F.: Oxford University Press, 1998.
- [10] J. Stewart, *Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas*, Octava edición. México: Cengage Learning, 2018.
- [11] Y. Nievergelt, «Calculus Measures Tank Capacity and Avoids Oil Spills», *Coll. Math. J.*, vol. 25, n.º 2, pp. 132-136, mar. 1994, doi: 10.1080/07468342.1994.11973596.
- [12] L. Alonso-Preciado, W. Suárez-Piña, y J. Zaldívar-Chacón, «Corrección de los errores por inclinación en la calibración de tanques cilíndricos nominalmente horizontales», *Bol. Científico Téc. INIMET*, vol. 2, pp. 7-14, 2008.
- [13] NORMA CUBANA 846: 2011, «Métodos y medios de verificación», en *Tanques cilíndricos horizontales*, 1981.
- [14] Z. Li, «The calculation of horizontal storage tank volume with elliptic cylinder type», *Math. Pract. Theory*, vol. 2, pp. 17-26, 1997.
- [15] W. Khaisongkram y D. Banjerdpongchai, «A combined geometric-volumetric calibration of inclined cylindrical underground storage tanks using the regularized least-squares method.», *International Conference on Control Applications*, 2004, pp. 1515-1520, 2004.
- [16] X. G. Pan, «Measurement and Calculation of Tilt Horizontal Tank Volume», *J. Oil Gas Storage Transp.*, vol. 6, n.º 6, pp. 47-50, 1987.
- [17] T. J. Tian, «Volume Calculation of the Straight Cylindric Part of Tihed Horizontal Tank», *J. Mod. Meas. Test*, vol. 5, pp. 32-36, 1999.
- [18] W. Xie, X. Wang, H. Cui, y J. Chen, «Optimization Model of Oil-Volume Marking with Tilted Oil Tank», *Open J. Optim.*, vol. 01, n.º 02, pp. 20-24, 2012, doi: 10.4236/ojop.2012.12004.
- [19] E. Q. Gao y P. Y. Feng, «Calculation of the Reserve of Horizontal Cylindrical Oil Storage Tank Declined Fiting at Different Liquid Level», *J. Shandong Metall.*, vol. 1, pp. 26-28, 1998.
- [20] J. Dou, Y. Mai, Z. Chen, y L. Wang, «Model of the identification of oil tank's position and the calibration of tank capacity table», *Pure Appl. Math.*, vol. 27, n.º 6, pp. 829-840.
- [21] S. Ou, J. Wang, y S. Han, «Model of the identification of oil tank's position and the calibration of tank capacity table», *China Pet. Chem. Stand. Qual.*, vol. 31, n.º 4, pp. 25-26.
- [22] C. Li, Y. Yuan, L. Song, Y. Tan, y G. Wang, «Mathematical Model Based on BP Neural Network Algorithm for the Deflection Identification of Storage Tank and Calibration of Tank Capacity Chart», *Abstr. Appl. Anal.*, vol. 2013, pp. 1-13, 2013, doi: 10.1155/2013/923036.
- [23] International Standardization Organization, «Petroleum and liquid petroleum products—Calibration of horizontal cylindrical tanks Part 1: Manual methods.», 2002.
- [24] A. Preciado, L. Yamí, W. Suárez-Piña, y J. A. Saldívar-Chacón, «CORRECCIÓN DE LOS ERRORES POR INCLINACIÓN EN LA CALIBRACIÓN DE TANQUES CILÍNDRICOS NOMINALMENTE HORIZONTALES», vol. 2, pp. 7-14, 2008.
- [25] International Standardization Organization, «Part 1: Manual methods», en *ISO 12917 Petroleum and liquid petroleum products -- Calibration of horizontal cylindrical tanks*, Ginebra: ISO, 2002.



[26] R. A. Mora Casal y J. R. Mora Casal, «Implementación de tablas de corrección al volumen del tanque cilíndrico horizontal inclinado, compatibles con la norma ISO 12917:2017», *Rev. Ing.*, vol. 29, n.º 2, jul. 2019, doi: 10.15517/ri.v29i2.36211.

[27] ENGINEER STANDARDS, «API 2551», en *Standard Method for Measurement and Calibration of Horizontal Tanks*, GEORGIA SOUTHERN UNIVERSITY.

[28] W. L. Coats, «Calibration of Cylindrical Tanks with Axis Inclined», *J. Inst. Petro-Leum*, vol. 34, n.º 297, pp. 627-646, 1948.

[29] NORMA Oficial Mexicana, «SOBRE EL PESO Y DIMENSIONES MÁXIMAS CON LOS QUE PUEDEN CIRCULAR LOS VEHÍCULOS DE AUTOTRANSPORTE QUE TRANSITAN EN LAS VÍAS GENERALES DE COMUNICACIÓN DE JURISDICCIÓN FEDERAL». 2017.

[30] S. L. Salas, G. J. Etgen, y E. Hille, *Calculus una y varias variables*, 4a. ed. Barcelona (España): Editorial Reverté, 2011.

Derechos de Autor (c) 2024 Michelle Guadalupe Salas-Flores, David Gasca-Figueroa, Francisco Javier García-Rodríguez, José Alfredo Ramos-Beltrán, Jorge Macías-Aboytes, Jafet Gassen Tula-Maldonado



Este texto está protegido por una licencia [Creative Commons 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Usted es libre para compartir —copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato— y adaptar el documento —remezclar, transformar y crear a partir del material— para cualquier propósito, incluso para fines comerciales, siempre que cumpla la condición de:

Atribución: Usted debe dar crédito a la obra original de manera adecuada, proporcionar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que tiene el apoyo del licenciante o lo recibe por el uso que hace de la obra.

[Resumen de licencia](#) - [Texto completo de la licencia](#)